Co to je teorie životaschopnosti

Vlastimil Křivan, České Budějovice

Úvod

V čísle 3 (1987) PMFA jsme se mohli seznámit v rubrice diskuse s názory předního matematika prof. J.-P. Aubina na úlohu motivace v matematice. Jedním z uvedených příkladů tzv. motivované matematiky byla teorie životaschopnosti (viability theory), jejímž jedním ze zakladatelů je prof. J.-P. Aubin. Vzhledem k tomu, že se teorie životaschopnosti poměrně rychle rozvíjí a přitahuje pozornost nejenom matematiků, ale i ekonomů, sociologů, biologů atd., chtěli bychom v tomto příspěvku seznámit čtenáře s tím, jak teorie životaschopnosti vznikla, čím se zabývá a jaké matematické prostředky používá. V posledních několika letech vyšla řada prací (např. [2,5,6,7,8,9,10,11,14,16, 19]), které více či méně s teorií životaschopnosti souvisí. Část knihy [4] se touto teorií zabývá a k publikaci je připravena monografie [3].

Teorie životaschopnosti byla motivována jednak teorií řízení a jednak snahou o popis komplikovaných a neúplně determinovaných dynamických systémů, které se vyskytují v ekonomii, sociálních vědách, biologii atd. Takovéto složité systémy, které jsou obvykle hierarchicky uspořádané se zpětnými vazbami, závislé na vnějších obtížně predikovatelných podmínkách, se někdy nazývají též 'makrosystémy' na rozdíl od jednoduchých, často fyzikálních systémů s jednoduchým uspořádáním, které se označují jako 'mikrosystémy'. Klasický matematický popis dynamických systémů, který je obvykle založen na použití různých typů diferenciálních rovnic, se pro popis 'makrosystémů' obvykle nehodí, poněvadž naše znalosti o těchto systémech jsou neúplné. Vzhledem k nedostatku měřených dat (jejichž získání může být časově velmi náročné) obvykle nejsme schopni určit přesně ani funkční tvary pravých stran diferenciálních rovnic ani odhadnout parametry pro diferenciální rovnice. Bylo tedy zapotřebí použít obecnější matematický aparát, který by umožňoval zahrnout i uvedené neznalosti a byl by tak reálnějším popisem našich znalostí (a neznalostí) o daném systému než 'přesný' popis našich neúplných znalostí založený na diferenciálních rovnicích.

Teorie životaschopnosti

Matematický aparát, který odpovídá těmto představám, je poměrně starý a jeho počátky jsou spojovány zejména s pracemi Zaremby a Marchauda [20,17] ze 40. let, kteří se zabývali existencí řešení tzv. rovnic v kontingencích a parakontingencích. Tato teorie byla dále rozvíjena zejména v souvislosti s teorií řízení a vyústila v teorii diferenciálních relací (viz. např. [4,15]). Zadat diferenciální rovnici na podmnožině $K \subset \mathbf{R}^n$ Eukleidovského $n-$ dimenzionálního prostoru $\mathbf{R}^n$ znamená zadat v každém bodě množiny K

vektor rychlosti. Zadat diferenciální inkluzi na množině K znamená zadat v každém bodě x množiny K množinu vektorů rychlosti $F(x)$. Takovéto zobrazení, které každému bodu x z množiny K přiřadí množinu $F(x) \subset \mathbf{R}^n$, budeme nazývat množinové zobrazení a značit ho $F: K \rightsquigarrow \mathbf{R}^n$. Diferenciální inkluze má pak následující tvar

$$\dot{x} \in F(x). \tag{1}$$

Diferenciální inkluze je tak možné chápat jako zobecnění diferenciálních rovnic poněvadž v případě, kdy množinové zobrazení $F(\cdot)$ je jednoznačné, dostáváme diferenciální rovnici. Řešením diferenciální inkluze se obvykle rozumí každá absolutně spojitá funkce splňující (1) skoro všude. Z hlediska výše zmíněných aplikací pro popis dynamiky makrosystémů musíme vzít do úvahy následující fakt: Trajektorie každého 'rozumného' systému musí splňovat určitá omezení. Tato omezení mohou mít v různých vědách různou podobu, v ekonomii jsou např. běžná omezení daná dostupností jednotlivých druhů zboží či služeb na trhu, v populační biologii jsou omezení dána nedostatkem zdrojů potravy, energie apod. Přes různorodost interpretací těchto omezení je z matematického hlediska možné je zapsat jednotně ve tvaru

$$x(t) \in K, \tag{2}$$

kde množinu K budeme označovat jako množinu životaschopnosti (viability set). Řešení diferenciální inkluze (1), která splňují (2), se nazývají životaschopná řešení. Je jasné, že při určitých 'minimálních' znalostech o daném systému můžeme většinu makrosystémů popsat pomocí diferenciální inkluze (1) a omezení (2). Tyto minimální znalosti se mohou týkat v případě modelů populační dynamiky možnosti odhadu maximální a minimální růstové rychlosti r_{max}, r_{min}, takže (1) má pak tvar

$$\dot{x} \in [r_{min}, r_{max}].x$$

a podobně.

Jednou z prvních otázek, kterou teorie životaschopnosti řeší, se týká nutných a postačujících podmínek pro existenci životaschopných řešení diferenciální inkluze (1). Problém existence životaschopných trajektorií pro diferenciální rovnice, tj. v případě, kdy místo diferenciální inkluze (1) uvažujeme diferenciální rovnici, vyřešil poprvé v roce 1942 Nagumo v práci [18]. Později Haddad [9,11] zobecnil tyto výsledky i na případ diferenciálních inkluzí a diferenciálních inkluzí se zpožděním. Jedním ze základních pojmů používaných v teorii životaschopnosti je tzv. Bouligandův kontingentní kužel $T_K(x)$ k množině K v bodě $x \in K$, který zobecňuje pojem tečného (někdy též nazývaného Clarkova) kužele k dané množině. V případě konvexní množiny K oba dva kužely splývají a nazývají se tečným kuželem. Uvedeme jeho poměrně názornou 'geometrickou' definici

$$T_K(x) := \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{\alpha>0} \bigcup_{0<h<\alpha} (1/h.(K - x) + \epsilon.B),$$

kde B značí jednotkovou kouli. S definicí kontingentního kužele je spojen i pojem kontingentní derivace $DF(x,y)(u)$ množinového zobrazení $F(\cdot)$ v bodě $(x,y) \in \mathrm{Graf}(F)$ ve směru $u \in \mathbf{R}^n$, která zobecňuje pojem derivace pro množinová zobrazení. Přitom $\mathrm{Graf}(F)$ značí graf množinového zobrazení $F(\cdot)$

$$\mathrm{Graf}(F) := \{(x,y) \mid x \in K, y \in F(x)\}.$$

Kontingentní derivace je definována následujícím způsobem

$$v \in DF(x,y)(u) \Longleftrightarrow (u,v) \in T_{\mathrm{Graf}(F)}(x,y).$$

Existenční věty pro teorii životaschopnosti samozřejmě úzce souvisejí s existenčními větami pro diferenciální inkluze, které mohou být formulovány za různých předpokladů o 'spojitosti' (v množinovém smyslu) množinové funkce $F : K \rightsquigarrow \mathbf{R}^n$ (viz. [4,15]). Jedním z běžných a často používaných předpokladů pro zaručení existence řešení diferenciální inkluze (1) je předpoklad o polospojitosti shora množinové funkce $F(\cdot)$ s neprázdnými, konvexními a kompaktními hodnotami. Jestliže předpokládáme, že K je lokálně kompaktní (např. uzavřená nebo otevřená), pak nutným a postačujícím předpokladem pro existenci životaschopného řešení diferenciální inkluze (1) je splnění následující názorné podmínky

$$\forall x \in K, \quad F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset, \tag{3}$$

která vyjadřuje ten fakt, že v každém bodě množiny K existuje alespoň jeden vektor rychlosti, který leží v kontingentním kuželi $T_K(x)$.

Z hlediska aplikací hrají důležitou úlohu v teorii diferenciálních rovnic pevné body (equilibria) diferenciální rovnice. V případě diferenciálních inkluzí budeme nazývat bod x^* pevným bodem, jestliže platí

$$0 \in F(x^*).$$

V případě, kdy množina životaschopnosti K je konvexní a kompaktní, implikuje podmínka životaschopnosti (3) existenci životaschopného pevného bodu diferenciální inkluze (1). Existenční věty pro teorii životaschopnosti byly dokázány pro celou řadu typů diferenciálních inkluzí jako např. pro neautonomní diferenciální inkluze, diferenciální inkluze v nekonečně rozměrných prostorech, funkcionální diferenciální inkluze (někdy též nazývané diferenciální inkluze se zpožděním), pro fuzzy diferenciální inkluze a operátorové diferenciální inkluze.

Teorie životaschopnosti se zabývá i případem, kdy daná množina K není množinou životaschopnosti pro diferenciální inkluzi (1). Získané výsledky odrážejí dva možné přístupy k řešení tohoto problému. První z nich se zabývá hledáním největší podmnožiny množiny K, která je již životaschopná. Lze dokázat, že taková největší množina (může být i prázdná) existuje a nazývá se životaschopné jádro (viability kernel) (viz. [3]). Druhý přístup naopak spočívá v modifikaci pravé strany diferenciální inkluze (1) tak, aby modifikovaná inkluze již měla životaschopná řešení. Modifikace spočívá obvykle v projekci diferenciální inkluze (1) na kontingentní kužel k množině životaschopnosti. Obvykle se bere projekce nejlepší aproximace [4], nebo některé její zobecnění [16]. Dostáváme tak zprojektovanou diferenciální inkluzi

$$\dot{x} \in \Pi_{T_K(x)}(F(x)). \tag{4}$$

Je zajímavé, že ačkoliv zprojektovaná diferenciální inkluze nesplňuje obvyklé podmínky pro existenci řešení pro diferenciální inkluze (např. polospojitost shora, nebo předpoklad o konvexitě hodnot množinové funkce $F(\cdot)$ se projekcí nezachovávají), přesto je s použitím teorie životaschopnosti možné dokázat existenci řešení inkluze (4). V případě projekcí diferenciálních rovnic na množinu životaschopnosti tak dostáváme existenční větu pro třídu rovnic s nespojitými pravými stranami. Zprojektované diferenciální inkluze jsou navíc ekvivalentní s tzv. diferenciálními variačními nerovnostmi [4,16], které byly zavedeny v mechanice a fyzice na konci 60. let.

Výběry speciálních řešení

Jednou z důležitých oblastí, kterou se teorie životaschopnosti zabývá, je existence řešení diferenciálních rovnic

$$\dot{x} = f(x), \tag{5}$$

kde funkce $f(\cdot)$ je selekce z množinového zobrazení $F(\cdot)$. Jedná se tedy o to, jaká řešení máme z hlediska daného problému vybrat z množiny všech životaschopných řešení. Poměrně často používaný způsob výběru řešení v teorii optimálního řízení na základě minimalizování zadaného funkcionálu není z hlediska makrosystémů adekvátní, poněvadž výběr řešení se provádí jednou provždy již v počátečním čase, takže neumožňuje systému pružně reagovat na případné změny v prostředí a pod. Ekonomie, evoluční biologie, populační biologie a další vědy motivovaly např. 'pomalá' řešení (slow solution), 'rychlá' řešení (fast solution) nebo 'těžká' řešení (heavy solution). Pomalá řešení zhruba řečeno minimalizují 'rychlost' vývoje systému, poněvadž volíme

$$f(x) := m(R(x)) := \{y \mid \|y\| = \inf_{z \in R(x)} \|z\|\},$$

kde

$$R(x) := F(x) \cap T_K(x)$$

je zpětnovazební množinové zobrazení (feedback map). Pro $R(\cdot)$ s konvexními hodnotami (např. pro $F(\cdot)$ s konvexními hodnotami a konvexní množinu K) tak dostáváme jednoznačnou funkci $f(\cdot)$, která ale nemusí být obecně spojitá. Přesto je možné dokázat existenci řešení diferenciální rovnice (5) s takto definovanou pravou stranou. Rychlá řešení naopak maximalizují rychlost vývoje systému a mohou tak vyjadřovat např. snahu jednotlivých populací organismů o dosažení maximální možné růstové rychlosti.

Těžké trajektorie se definují pro diferenciální rovnice s řízením. Pojednáme o nich v následující části.

Matematické motivace teorie životaschopnosti

Z matematického hlediska nachází teorie životaschopnosti nejvíce motivací v teorii řízení se stavovými omezeními. Uvažujme diferenciální rovnici s řízením

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{6}$$

kde $u(t) \in U(x(t))$, $U : \mathbf{R}^n \rightsquigarrow \mathbf{R}^p$, $f : \mathrm{Graf}(U) \rightsquigarrow \mathbf{R}^n$. Množinové zobrazení $U(\cdot)$ definuje omezení kladená na přípustná řízení. Dále uvažujme omezení na trajektorie popsaná inkluzí (2). Diferenciální rovnici s řízením můžeme převést na diferenciální inkluzi, jestliže definujeme

$$F(x) := \{f(x,u) \mid u \in U(x)\}. \tag{7}$$

Problém existence řízení pro diferenciální rovnici (6) se stavovými omezeními se tak převádí na problém existence životaschopného řešení diferenciální inkluze (1). Na druhé straně též za podmínky o spojitosti $f(\cdot,\cdot)$ a shora polospojitosti množinového zobrazení $U(\cdot)$ (viz. [4]) platí, že pokud $x(\cdot)$ je řešením diferenciální inkluze (1), pak existuje měřitelná funkce $u(t) \in U(x(t))$ taková, že platí diferenciální rovnice (6).

Z hlediska teorie řízení můžeme také interpretovat různé výběry řešení, tak jak o nich bylo pojednáno v předchozí části. Navíc se definují tzv. těžká řešení, která splňují následující diferenciální inkluze

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in f(x(t), u(t)) \\ \dot{u}(t) &\in m(DR(x(t), u(t))(f(x(t), u(t))). \end{aligned}$$

Přitom druhá z obou inkluzí formálně představuje zderivovaný zákon zpětné vazby, tj.

$$u \in R(x) := \{u \in U(x) \mid f(x,u) \in T_K(x)\}.$$

Význam těchto těžkých řešení spočívá v tom, že řízení se mění pouze tehdy, je-li to nutné pro zachování životaschopnosti systému, tj. v těch případech, kdy se systém dostane na hranici množiny životaschopnosti a dané řízení neumožňuje životaschopné prodloužení řešení.

Jak uvidíme v následující části v některých případech je účelné stanovit omezení na rychlost změn řízení $u(\cdot)$, např.

$$-c \leq \dot{u} \leq c,$$

kde $c \geq 0$. Zvláště důležitý je ten případ, kdy $c = 0$, tj. řízení je konstantní. V tomto případě se životaschopné jádro pro diferenciální rovnici (6) s konstantním řízením $u(t) = konst.$ nazývá životaschopná buňka (viability cell) [6,3]. V případě, kdy je tato životaschopná buňka pro nějaké konstantní řízení u neprázdná, existuje řešení diferenciální rovnice (6) s tímto řízením, které leží v této buňce. Jako příklad takových životaschopných buněk mohou sloužit např. životaschopné pevné body diferenciální rovnice (6) pro různá konstantní řízení u.

Nematematické motivace teorie životaschopnosti

Aplikace matematiky jsou v současné době ve značné oblibě v řadě oborů, které bezprostředně s matematikou nesouvisejí. Mluví se o např. o biomatematice, matematické ekologii apod. Přitom se v drtivé většině případů přejímají osvědčené postupy např. z popisu fyzikálních systémů a 'aplikují' se i v těchto oborech. Často ovšem za cenu deformace původního problému, který je ve své podstatě tak komplikovaný, že klasické matematické postupy nutně selhávají. Vzniká tak paradoxní situace, kdy na jedné straně simulujeme na počítači s vysokou přesností matematický model, který s reálným objektem již prakticky nesouvisí vůbec anebo pouze velmi mlhavě. Je proto zapotřebí vytvořit nové metody a postupy, které by byly motivovány makrosystémy a ne se snažit přizpůsobovat makrosystémy stávajícím metodám. Jedním z takových příkladů je teorie životaschopnosti. Tak například matematická představa životaschopných buněk odpovídá biologické evoluční představě 'rozkouskovaných rovnováh' (punctuated equilibria) [1,3], která např. vysvětluje náhlé změny v druhovém složení na Zemi, tak jak tomu bylo např. zhruba před 65 miliony let, kdy savci vytlačili dinosaury. Z hlediska teorie životaschopnosti je tento jev možný vysvětlit tím, že změnou vnějších podmínek došlo k tomu, že konstantní řízení, které udržovalo systém v určité buňce životaschopnosti muselo být v zájmu zachování životaschopnosti systému při změněných podmínkách nahrazeno novým řízením, kterému odpovídala jiná buňka životaschopnosti. Tím byla ustavena i nová rovnováha z hediska zastoupení a početnosti jednotlivých druhů na Zemi.

V ekonomii [4,3,12] můžeme popsat rozdělování dostupných druhů zboží (commodities) na trhu následujícím způsobem. Uvažujme n spotřebitelů (přitom někteří z nich jsou současně také producenty), kteří si rozdělují l dostupných druhů zboží. V každém okamžiku označme toto rozdělení (allocation) $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $x_i(t) \in \mathbf{R}^l$. Přirozeně musí platit jistá omezení daná např. nedostatkem surovin, pracovních sil apod. Tato omezení můžeme popsat pomocí jisté množiny $K \subset \mathbf{R}^l$ (viz. [4]). Z hlediska zachování životaschopnosti (v tomto případě ji můžeme interpretovat jako jistou rovnováhu na trhu) musí platit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \in K.$$

Předpokládejme nyní, že spotřebu, event. produkci, každého jedince můžeme vyjádřit pomocí následující diferenciální rovnice s řízením $p \in \mathbf{R}^l$, které budeme interpretovat jako cenu

$$\dot{x}_i(t) = c_i(x_i(t), p(t)). \tag{8}$$

Z podmínky (7) můžeme pro každé rozdělení jednotlivých druhů zboží mezi n spotřebitelů určit množinu přípustných cen $P(x)$ tak, aby příslušné trajektorie (8) byly životaschopné. Otevřenou otázkou zůstává problém výběru ceny p z této množiny přípustných cen. V zásadě existují dva přístupy pro řešení tohoto problému. První přístup spočívá ve výběru ceny tak, aby byla maximalizována jistá účelová funkce, jak je to běžné v teorii optimálního řízení. Vzhledem ke složitosti uvedeného systému je ovšem tento přístup nevhodný, poněvadž náhlé vnější nepředvídatelné vlivy, které mohou vést ke změně množiny životaschopnosti by mohly způsobit, že optimální řešení by již nebylo životaschopné. Jako přirozená se jeví druhá možnost, která spočívá v tzv. okamžité optimalizaci, kdy v každém okamžiku vybíráme pro danou alokaci $x \in K$ cenu $p \in P(x)$ podle určitých pevně daných pravidel. Jedním z příkladů takové okamžité optimalizace v případě tvorby cen může být následující pravidlo: udržovat cenu konstantní až do té doby, kdy daná cena neumožňuje životaschopné alokace a je ji nutné tedy změnit. Toto pravidlo bylo odpozorováno z dlouhodobého chování cen. Tento zákon vede na těžké trajektorie. Ekonomické motivace týkající se omezení na růst inflace odpovídají z hlediska teorie životaschopnosti zkoumání existence životaschopných řešení s omezeními na rychlost změn řízení.

Dalším z příkladů použití teorie životaschopnosti může být konstrukce diferenciálních rovnic nebo inkluzí popisujících daný problém. Základní idea je následující. Biologické a jiné systémy mají jisté endogenní zákonitosti vývoje, které se uplatňují, pokud vývoj není limitován vnějšími omezeními, např. nedostatkem živin, prostoru apod. Tyto endogenní zákonitosti se obvykle popisují pomocí diferenciální inkluze (1). Tak například, jestliže populace bakterií bude udržována v optimálních podmínkách a nebude limitována přísunem živin, pak poroste exponenciálně. Jestliže neroste exponenciálně, znamená to, že je limitována (např. živinou). Předpokládejme, že jsou dána jistá omezení, která definují množinu životaschopnosti K. Otázka zní: Jak můžeme modifikovat inkluzi

(1) tak, aby měla životaschopné řešení, známe-li endogenní dynamiku systému a omezení na systém kladená?

První metoda, která byla použita pro konstrukci modelů ekonomického plánování, spočívá v projekci diferenciálních rovnic popisujících systém na tangenciální kužel k množině životaschopnosti, která je definovaná pomocí stavových omezení, (viz. [13,12]). Projekce diferenciálních inkluzí je možné také použít pro konstrukci na sebe vzájemně působících populací [16].

Závěr

V tomto článku jsme se snažili čtenářům přiblížit poměrně novou a dá se říci rodící se matematickou teorii - teorii životaschopnosti, která vznikla na základě potřeb popisu složitých dynamických systémů, které se vyskytují v tzv. 'soft' vědách (biologie, ekonomie, atd.). Zároveň jsme se snažili ukázat některé motivace a to jak matematické tak i biologické a ekonomické, které tuto teorii bezprostředně motivovaly.

Literatura

[1] AUBIN J.P.: *Slow and heavy viable trajectories of controlled problems.: Smooth viability domains,* In *Multifunctions and Integrands.* Lecture Notes in Math. *1091*, strany 105–116, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] AUBIN J.P.: *Smooth and heavy viable solutions to control problems,* Nonlinear and convex analysis *107* (1987),1–13.

[3] AUBIN J.P.: *Viability theory.* V tisku.

[4] AUBIN J.P., CELLINA A.: *Differential inclusions.* Springer-Verlag, Berlin (1984).

[5] AUBIN J.P., CELLINA A., NOHEL J.: *Monotone trajectories of multivalued dynamical systems,* An. mat. pura et appl. *115* (1977), 99–117.

[6] AUBIN J.P., FRANKOWSKA H.: *Heavy viable trajectories of controlled systems,* In *Dynamics of macrosystems.* Lecture Notes Econ. Math. Syst. *257*, strany 148–167, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[7] AUBIN J.P., FRANKOWSKA H.: *A viability approach to Lyapunov's second method,* In *Dynamical systems.* Lecture Notes Econ. Math. Syst. *287*, strany 31–38, Springer-Verlag (1987).

[8] CLARKE F.H., AUBIN J.P.: *Monotone invariant solutions to differential inclusions,* J. London Math. Soc. *16* (1977), 357–366.

[9] HADDAD G.: *Monotone viable trajectories for functional differential inclusions,* J. Diff. Eq. *42* (1984), 179–204.

[10] HADDAD G.: *An introduction to viability theory,* In *Dynamics of macrosystems.* Lecture Notes Econ. Math. Syst. *257*, strany 139–147, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[11] HADDAD G.: *Monotone trajectories of differential inclusions and functional differential inclusions with memory,* Israel J. of Mathematics *39* (1981), 83–100.

[12] HENRY C.: *Economie mathematique - problemes d'existence et de stabilite pour des processus dynamiques en economie mathematique,* C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A. *278* (1974), 97–100.

[13] HENRY C.: *An existence theorem for a class of differential equations with multivalued right-hand side,* J. Math. Anal. Applications *41* (1973), 179–186.

[14] KURZHANSKII A.B., FILIPPOVA T.F.: *Dynamics of the set of viable trajectories to a differential inclusion: the evolution equation,* Problems of Control and Information Theory *17* (1988), 137–144.

[15] KURZWEIL J.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* SNTL, Praha (1978).

[16] KŘIVAN V.: *Aplikace teorie viability v biologii.* Disertační práce, JBC ČSAV České Budějovice (1988).

[17] MARCHAUD M.: *Sur le champs de demi-cones et les équations différentielles du premier ordre,* Bull. Sc. Math. *62* (1938), 1–38.

[18] NAGUMO M.: *Über die lage der integralkurven gewöhnlicher differentialgleichungen,* Proc. Phys. Math. Soc. Japan *24* (1942), 551–559.

[19] PAPAGEORGIOU N.S.: *Viable and periodic solutions for differential inclusions in Banach spaces,* Kobe J. Math. *5* (1988), 29–42.

[20] ZAREMBA S.C.: *Sur les équations au paratingent,* Bull. Sc. Math. *60* (1936), 139–160.